

所属・資格 情報科学科・教授

申請者氏名 古市 茂

研究課題	幾何平均および相対エントロピーに関連した基礎研究	
報告概要の概	研究目的 および 研究概要	<p>正作用素（正定値行列）に対して定義される幾何平均や相対エントロピーはこれまでも多くの研究がなされてきた。本研究課題ではこれらに関連した研究内容として以下について考察していく。まず、幾何平均については、スペクトル幾何平均との関係を2023年に1つの成果をあげ論文発表した。それを補完するものを考察する。つまり平均の重みは通常0と1の間の実数であるが、それ以外の場合にどのような関係があるのかを調べる。次に、通常の幾何平均とは異なり作用素平均ですらない2項演算で定義されたものについて調べる。この重みがない場合の作用素はM.Linによって定義されある行列式不等式の研究に用いられている。さらに、S.S.Dragomirによって導入された2乗タイプの幾何平均についても考察していく。最後に、相対エントロピーに関する研究テーマとしては、近年、F.Hansenによって導入された縮約相対エントロピーの変分表現とそれを利用した下界の導出を試みる。また、この縮約相対エントロピーを一般化対数関数を用いて、パラメータ拡張したものを考え、それについても同様の考察を試みる。</p>

研究
の
結果

2025 年度に出版された研究成果物における研究結果について、研究成果物の番号に合わせて、簡潔に記載する。その前に、本研究課題として掲げていた目標は[4]によってほぼ達成されたことを報告する。一部不十分であったのはパラメータの範囲が -1 と $-1/2$ の間での証明が完成せずに、他の邦人らによって[4]の出版の後に示されたからである。今後、本研究課題を引き続き行う場合にはそのパラメータが -1 未満の場合（対称性から 2 より大きい場合と同義）を考察する必要がある。一方、縮約相対エントロピーの研究については研究目的の欄に記載した通りにコペンハーゲン大学の F.Hansen 教授と共同で研究し先ごろ、数理物理関係の専門誌に受理されたところであり、2025 年中に出版される予定である。また、M.Lin によって考察された作用素平均でない 2 項演算に関する研究成果は、Acta Scientiarum Mathematicarum 誌の 2024 年 12 月号にて出版された。さらに、S.S.Dragomir によって導入された 2 乗タイプの幾何平均についての考察結果は、[1]の出版にて達成された。以上のように、研究目的に記載した内容についてはほぼ完遂したと言えよう。

それでは、以下では、研究成果物（査読論文のみを対象とする）の内容について述べていく。中には本研究課題と少しだけ離れた内容もあるが、広い意味で関連していることに注意してほしい。

[1] この論文では、単位元を単位元に写す線形正写像といわゆる作用素 2 次平均の上界・下界をいくつか示した。特に、本論文において、この方面での先行研究として有名な S.S.Dragomir の結果は、藤井・中本の不等式を使用して改善した。応用の 1 つとして、本論文で得られた結果による数域半径不等式に関する結果をいくつか提示した。最後に、作用素 2 次平均の安藤型不等式を検討した。

[2] この論文では、ヒルベルト空間における作用素のペアに対するユークリッド数域半径の新しい重み付き上界と下界を示した。これらの上界のいくつかは、文献の最近の結果よりも優れていることを示した。また、数域半径と Davis–Wielandt 半径の新しい不等式も発見した。興味深いことに、得られた上界と下界は対称性を有していなかった。

[3] 一般化された Hadamard 分数階積分作用素を介して、非常に豊富なクラスの幾何学的・算術的凸関数に対する重み付き Hermite–Hadamard 型と Hermite–Hadamard–Mercer 型の不等式を証明した。本論文で得られた結果の応用の 1 つとして、算術平均と幾何平均の間の補間関係を確立し、Tsallis 相対作用素エントロピーの新しい上界を証明することにより Hadamard 比例分数階積分作用素と Hadamard k -分数階積分作用素を介した新しい不等式の応用を示した。

[4] スペクトル幾何平均はいくつかの論文で最近盛んに研究されている。この論文では、まず一般化された Kantorovich 定数を用いて、ヒルベルト空間上のすべての正可逆作用素のスペクトル幾何平均のヘルダー型不等式を確立し、通常的作用素順序での重み付き幾何平均とスペクトル幾何平均の関係を示した。さらに、それらの作用素ノルム版の不等式を示した。次に、行列の場合にスペクトル幾何平均の対数マジョリゼーションとその応用を示した。特に、3 つの量子 Tsallis 相対エントロピー間の大小関係を示した。最後に、Tsallis 相対エントロピーの新たな下界を示した。

[5] 本論文では、凸関数の既知の特性を補完する形で、 h -凸関数の新しい特性をいくつか考察した。得られた結果には、Mercer 型不等式、勾配不等式、Jensen 型不等式、平均に関する上界・下界、Hermite–Hadamard 不等式とその範囲外での振る舞い、および超加法不等式が含まれる。得られた結果は、単位元を単位元に写す線形正写像、弱マジョライゼーションと有名な Klein 不等式を一般化するトレース不等式など、行列不等式に関連するいくつかの応用も与えた。

[6] 不等式は制御システム、保険数理科学、情報理論および他の科学におけるその利用に応用できるため多くの研究者がそれらの改良と一般化について研究している。不等式の研究では凸関数とその派生クラスが最も研究されている。一方、分数階微分は工学、物理学、数学において不可欠なツールとして登場し幅広く研究されている。最近導入された Cr 順序を基礎とした区間値関数のクラスは、情報理論における応用を与えた。この論文では、区間値 Hadamard 分数階積分作用素を介して、 Cr 凸関数の幾何学平均・算術平均不等式を含む数学的不等式について研究した。そして、幾何学-算術凸関数と完全情報系における特定の確率を持つ各イベントの自己情報関数との間の関係を確立した。最後に通常の積分に対する不等式の改良を生み出す上での区間値 Hadamard 分数階積分作用素の役割を示すことで、本論文では理論の拡張と応用の側面の両方を提供した。

[7] この論文では、ノルム空間におけるいくつかの新しい上界・下界を提示し、これらの空間における劣加法性の振る舞いと角度や距離への応用、さらにヒルベルト空間上の作用素への応用を示した。結果を確立するために凸関数の性質をテクニカルに利用した点に 1 つの独自性があった。

[8] 不等式に関する研究の一部は Jensen 不等式と Young 不等式の研究に費やされてきた。この論文では、対数凸関数と幾何学的凸関数に関するいくつかの新しい不等式を示した。その結果として Young 不等式と Jensen 不等式の改良を与えた。さらに条件を課した 2 つの関数に対して作用素に対する Jensen 型不等式も確立された。これらの新しい不等式を利用して相対作用素エントロピーに関連する作用素不等式について研究し、幾つかの新しい成果を得た。

[9] 正定値行列のある種の一般化にセクター行列があり多くの研究がされてきた。この論文では行列平均とセクター行列を含むいくつかの不等式の拡張について研究した。具体的には Kantorovich 定数を含む、セクター行列のノルム、数域半径、および行列式の新しい不等式を示した。

[10] Hermite-Hadamard 不等式は関数の凸性を際立たせる凸関数の積分平均の上界・下界を与える最も興味深い不等式の 1 つである。この論文では、この新しい逆不等式を示し正数のスカラーに対する平均の不等式、作用素に対する平均の不等式および Riemann-Liouville 分数階積分への応用を示した。

[11] この論文では Riemann-Liouville 分数階積分の文脈で Hermite-Hadamard 不等式の明確な上界・下界を導出する。Jensen 不等式の一般化である Jensen-Mercer 不等式は分数階積分の Hermite-Hadamard 不等式の新しい改良された上界・下界を得るために一般的な点において利用された。古典的または分数階微分学における既存の Hermite-Hadamard 不等式は Jensen 不等式のように通常は 2 点のみを含む凸関数に対して証明される。Jensen-Mercer 不等式の一般的な点を適用することで Jensen 不等式または Jensen-Mercer 不等式の 2 点に対して既存の結果の範囲を拡張した。

[12] 複素行列の代数構造をよりよく理解するために accretive 行列のクラスについて研究した。accretive 行列とは実部が正定値である行列のことである。このクラスは正定値行列で知られている結果を補完する役割のため近年注目を集めている。多くの結果の中で、順序を保存する結果、Choi-Davis 型不等式、平均凸不等式、accretive 行列の絶対値の新しい上界・下界を示した。これらの結果を既存の結果と比較した。最後に、accretive 行列に関連するエントロピーに関連した結果を示した。

[13] この論文では、凸関数のクラスを検討し、さらに Jensen-Mercer 型の不等式を導出した。得られた結果はいくつかの既知の不等式を改善し、一般化に成功した。またスカラーと作用素に対する Jensen-Mercer の不等式の逆も示した。応用として Wigner-Yanase-Dyson 関数と対数平均に関連する新しい非自明な不等式を与えた。

[14] この論文では、凸関数の Hermite-Hadamard 不等式を利用して複素数の三角不等式を改良した。次に、得られた改良の応用としていくつかの作用素不等式を示した。作用素論への応用として、数域半径不等式と作用素平均不等式について新しい結果を与えた。

[15] Wigner-Yanase-Dyson 関数と対数平均の大小関係は知られている。また対数平均の上界・下界も良く知られている。この論文では Wigner-Yanase-Dyson 関数と対数平均の 2 つの逆不等式を示した。また得られた結果を対数平均の既知の上界・下界と比較した。最後に得られた結果に基づいて作用素不等式を示した。

[16] 対数平均の上界は、算術平均と幾何平均の凸結合によって与えられる。さらに対数平均の下界は算術平均と幾何平均の geometric bridge によって与えられる。この論文では対数平均の上界・下界について研究した。対数平均に関する基本的な不等式について作用素不等式とノルム不等式を示した。Heron 平均のユニタリ不変ノルムのパラメータの単調性を示し、対数平均のユニタリ不変ノルムの上界としてその最適性を示した。Heron 平均、Heinz 平均、二項平均、Lehmer 平均のユニタリ不変ノルムの大小関係について研究した。最後に、スカラー不等式の応用として新しい平均に関する不等式の連鎖を示した。

[17] 分数階微分とともに近年、フラクタル微分についても研究がされている。本論文では、フラクタル微分の概要を示しフラクタル微分と制約付きフラクタル変分微分の両方にラグランジュ乗数を用いた研究結果をした。物理学のさまざまな分野にわたるこれらの方法の応用を検討し、制約付きフラクタル変分微分を使用することで、フラクタル波動方程式、量子力学におけるフラクタルシュレーディンガー方程式、フラクタル電磁気学のマクスウェル方程式、フラクタル古典力学の制約に対するラグランジュ方程式などの基本方程式を導出した。これらの概念を詳しく説明するいくつかの例を与えた。

	<p>研究の考察・反省</p>	<p>研究の結果の欄にも記載したが、本研究課題の1つとして挙げているスペクトル幾何平均に関する対数マジョリゼーションの関係式が一部のパラメータでの証明にとどまり、証明できなかった部分については他の研究者によって行われた点は反省すべきである。とはいえ、こういったことが研究の最前線では起こり得ることである。もちろん、[4]で共同研究した共著の方も私自身も気が付かなかつたわけではなくその証明が出来なかつたというのが現実であり、私自身に至ってはその証明について半年間も考えたが完成せずに、パラメータが半分の範囲での証明に終わった訳である。別の研究者らの証明を読めば直ぐに理解出来、苦い思いをしたわけであるが、思いつけなかつた自分の能力であり、機会があれば今後活かしたいと思う。</p>
<p>研究発表 学会名 発表テーマ 年月日/場所</p> <p>研究成果物 テーマ 誌名 巻・号 発行年月日 発行所・者</p>		<p>※この欄は、本報告書提出時点で判明している事項についてご記入ください。</p> <p>研究発表</p> <p>[a] S. Furuichi, 2024 International Workshop on Matrix Analysis and Quantum Information Theory, <i>Reduced Tsallis relative entropy</i>, Hue City, Vietnam (or Online) 2024年6月4日.</p> <p>[b] S. Furuichi, 5TH EDITION - MACOS 2024, <i>Trace inequalities for the generalized relative entropies</i>, Brasov, Romania, 2024年6月14日</p> <p>[c] 古市 茂, 日本数学会 2024年度秋季総合分科会, <i>一般化エントロピーとトレース不等式</i>, 2024年9月5日, 大阪大学.</p> <p>[d] 古市 茂, 環瀬戸内応用数理研究部会第28回シンポジウム, <i>相対エントロピーと行列トレース不等式</i>, 2024年12月21日, 山口東京理科大学.</p> <p>研究成果物</p> <p>[1] H. R. Moradi, S. Furuichi and M. Sababheh, Operator quadratic mean and positive linear maps, <i>J. Math. Inequal.</i>, 18(4)(2024), 1263-1279. 2025年1月14日</p> <p>[2] N. Altwaijry, S. S. Dragomir, K. Feki and S. Furuichi, New bounds for the Euclidean numerical radius of two operators in Hilbert spaces, <i>Symmetry</i>, 17(1)(2025), 7(28 pages). 2024年12月24日</p> <p>[3] A. Fahad, Z. Ali, S. Furuichi, S. I. Butt, A. Ayesha, Y. Wang, New inequalities for GA-h convex functions via generalized fractional integral operators with applications to entropy and mean inequalities, <i>Fractal Fract.</i>, 8 (12)(2024), 728 (21pages). 2024年12月12日</p> <p>[4] S. Furuichi and Y. Seo, Some inequalities for spectral geometric mean with applications, <i>Linear and Multilinear Algebra</i>, Published online first, (20 pages) 10.1080/03081087.2024.2433512. 2024年12月</p> <p>[5] M. Sababheh, N. Minculete, H. R. Moradi and S. Furuichi, Complementary results for h-convex functions with applications, <i>Journal of Nonlinear and Convex Analysis</i>, 25(11)(2024), 2843-2862. 2024年11月</p> <p>[6] A. Fahad, Z. Ali, S. Furuichi and Y. Wang, Novel fractional integral inequalities for GA-Cr-convex functions and connections with information systems, <i>Alexandria Engineering Journal</i>, 113 (2025) 509-515. 2025年1月</p> <p>[7] M. Sababheh, S. Furuichi, N. Minculete and H. R. Moradi, Bounds in normed spaces using convex functions, <i>Iran. J. Sci.</i>, (2024), 10.1007/s40995-024-01730-9. 2024年10月30日</p> <p>[8] S. Furuichi, H. R. Moradi and S. Dutta, On some relative operator entropies by convex inequalities, <i>Journal of Convex Analysis</i>, 31(3) (2024), 983-998. 2024年7月</p> <p>[9] L. Nasiri and S. Furuichi, Extensions of matrix mean inequalities to sector matrices, <i>J. Math. Inequal.</i>, 18 (3)(2024), 1171-1185. 2024年9月</p> <p>[10] M. Sababheh, T.-H. Dinh, H. R. Moradi and S. Furuichi, Reversed Hermite-Hadamard inequality with applications, <i>J. Math. Inequal.</i>, 18(3)(2024), 1029-1052. 2024年9月</p> <p>[11] M.A. Ali, W. Liu, S. Furuichi and M. Feckan, Improved Hermite-Hadamard inequality bounds for Riemann-Liouville fractional integrals via Jensen's inequality, <i>Fractal Fract.</i>, 2024(8)(2024), 547 (16 pages). 2024年9月20日</p> <p>[12] S. Furuichi, H. R. Moradi and M. Sababheh, Further properties of accretive matrices, <i>Annales Fennici Mathematici</i>, 49(1) (2024), 387-404. 2024年6月11日</p> <p>[13] F. P. Mohebbi, M. Hassani, M. E. Omidvar, H. R. Moradi and S. Furuichi, Further Jensen-Mercer's type inequalities for convex functions, <i>J. Math. Inequal.</i>, 18 (2) 2024, 719-737. 2024年6月</p> <p>[14] S. Furuichi, H. R. Moradi and M. Sababheh, Operator inequalities via the triangle inequality, <i>J. Math. Inequal.</i>, 18(2) 2024, 631-642. 2024年7月</p> <p>[15] S. Furuichi, Wigner-Yanase-Dyson function and logarithmic mean, <i>J. Math. Inequal.</i>, 18(2)2024, 605-617. 2024年6月</p> <p>[16] S. Furuichi and M. E. Amlashi, On bounds of logarithmic mean and mean inequality chain, <i>Math. Inequal. Appl.</i>, 27 (2)(2024), 379-399. 2024年5月</p> <p>[17] A. K. Golmankhaneh, C. Cattani, R. Pasechnik, S. Furuichi, and P. E. T. Jorgensen, Fractal calculus of variations for problems with constraints, <i>Modern Physics Letters A</i>, 40(7)(2025), 2550001., 2025年3月.</p>