2024年度入試
Ａ方式_第1期（理学系）　数学①

問題	解答番号	正解	備考
Ⅰ	1	－	全一致
	2	1	
	3	2	
	4	7	
	5	8	
	6	5	
	7	－	全一致
	8	2	
	9	9	全一致
	10	1	
	11	2	
	12	1	
	13	6	
Ⅱ	14	3	全一致
	15	2	
	16	2	全一致
	17	6	
	18	2	全一致
	19	0	
	20	1	
	21	1	
	22	4	全一致
	23	0	
Ⅲ	24	2	全一致
	25	9	
	26	3	全一致
	27	1	
	28	2	全一致
	29	3	
	30	3	全一致
	31	1	
	32	1	全一致
	33	1	
	34	4	
	35	1	全一致
	36	7	

V 数学 ① (解答)

(1) 求める接線の接点を (t, e^t) とする. 接線の傾きは e^t だから, 接線の方程式は t を用いて次のように書ける:

$$y - e^t = e^t(x - t) \tag{$\star$}$$

$(x, y) = (0, 0)$ を代入して,

$$-e^t = -te^t \quad \Longleftrightarrow \quad e^t(1 - t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 1$$

よって, $t = 1$ である. これを $(\star)$ に代入して $y = ex$ を得る.

(2) $\displaystyle\int_0^1 (e^x - ex)dx = \left[e^x - \frac{e}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e - 2).$

(3) $f(x) = e^x,\ \ g(x) = -2ax^2 + 3ax$ とおく.

$$\begin{cases} f'(x) = e^x \\ g'(x) = -4ax + 3a \end{cases}$$

$\mathrm{P}(p, e^p)$ とおく. 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は P で共通接線をもつので,

$$\begin{cases} f(p) = g(p) \quad \Longleftrightarrow \quad e^p = -2ap^2 + 3ap \\ f'(p) = g'(p) \quad \Longleftrightarrow \quad e^p = -4ap + 3a \end{cases} \tag{$\star\star$}$$

が成り立つ. $(\star\star)$ の 2 式から e^p を消去して $-2ap^2 + 3ap = -4ap + 3a$. 両辺を $a > 0$ で割って整理して, p に関する 2 次方程式を得る:

$$2p^2 - 7p + 3 = (2p - 1)(p - 3) = 0$$

- $p = 3$ のとき. $(\star\star)$ の第 1 式に $p = 3$ を代入して $e^3 = -18a + 9a$. よって, $a = -\dfrac{e^3}{9} < 0$ であり, 条件 $a > 0$ に適合しない.
- $p = \dfrac{1}{2}$ のとき. $(\star\star)$ の第 1 式に $p = \dfrac{1}{2}$ を代入して $e^{\frac{1}{2}} = -\dfrac{a}{2} + \dfrac{3}{2}a$. よって, $a = \sqrt{e} > 0$ であり, これは条件 $a > 0$ に適合する. したがって, 答は

$$\underline{\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, \sqrt{e}\right), \quad a = \sqrt{e}}$$

(4) $f(x) = e^x,\ \ h(x) = -2bx^2 - 3bx$ とおく.

$$\begin{cases} f'(x) = e^x \\ h'(x) = -4bx - 3b \end{cases}$$

$\mathrm{Q}(q, e^q)$ とおく. 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = h(x)$ は Q で共通接線をもつので,

$$\begin{cases} f(q) = h(q) \quad \Longleftrightarrow \quad e^q = -2bq^2 - 3bq \\ f'(q) = h'(q) \quad \Longleftrightarrow \quad e^q = -4bq - 3b \end{cases} \tag{$\star\star\star$}$$

が成り立つ. $(\star\star\star)$ の 2 式から e^q を消去して $-2bq^2-3bq=-4bq-3b$. 両辺を $b>0$ で割って整理して, q に関する 2 次方程式を得る:

$$2q^2-q-3=(2q-3)(q+1)=0$$

したがって, $q=\dfrac{3}{2},-1$.

- $q=\dfrac{3}{2}$ のとき. $(\star\star\star)$ の第 1 式に $q=\dfrac{3}{2}$ を代入して $e^{\frac{3}{2}}=-2b\cdot\dfrac{9}{4}-3b\cdot\dfrac{3}{2}=-9b$. よって, $b=-\dfrac{1}{9}e^{\frac{3}{2}}<0$ であり, 条件 $b>0$ に適合しない.
- $q=-1$ のとき. $(\star\star\star)$ の第 1 式に $q=-1$ を代入して $e^{-1}=-2b+3b$. よって, $b=\dfrac{1}{e}>0$ であり, これは, 条件 $b>0$ に適合する. したがって, 答は

$$\underline{\mathrm{Q}\Big(-1,\frac{1}{e}\Big),\quad b=\frac{1}{e}}$$

(5) (3), (4) より求める面積は

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{0}\Big(e^x+2bx^2+3bx\Big)\,dx\;+\;\int_{0}^{\frac{1}{2}}\Big(e^x+2ax^2-3ax\Big)\,dx\\&=\Big[e^x+\frac{2b}{3}x^3+\frac{3b}{2}x^2\Big]_{-1}^{0}+\Big[e^x+\frac{2a}{3}x^3-\frac{3a}{2}x^2\Big]_{0}^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{17}{24}\sqrt{e}-\frac{11}{6e}\end{aligned}$$

最後の等号は $a=\sqrt{e}$, $b=\dfrac{1}{e}$ を代入した.