

## 2-3 特異点の代数的・幾何的研究

- 代表者 渡辺敬一 (数学 教授)
- 分担者 茂手木公彦 (数学 教授)  
泊 昌孝 (数学 教授)

### 【研究の概要および成果】

本研究は特異点の性質を代数的及び幾何的の両方向から解析するのが目的である。特に渡辺が可換環論的、代数幾何的側面から、泊が複素解析的、代数幾何的側面から、茂手木が位相幾何学的、結び目理論から取り組む。

具体的な問題としては次のようなものが挙げられる。

- (A) 特異性の代数的不変量と幾何的不変量の関係の研究。
- (B) 正標数の概念を用いて定義された、F-threshold, 一般化されたテストイデアル等の概念を用いて、特異点の新しい分類理論を作る。特に2次元, 3次元の特異点を詳細に研究する。
- (C) 局所環の因子類群。そのtorsion元から定まる巡回被覆。さらにその反復によって得られるアーベル被覆の実現と対応する基本群。ホモロジー群との関係の研究。
- (D) ザイフェルトファイバー空間を生み出すDehn手術に焦点を絞り。そのようなDehn手術全体からなるネットワークを構成し。大域的に理解する。
- (E) 重み付き超曲面となる射影多様体の決定と、与えられた射影多様体を $\text{Proj}(R)$ としてもつ正規Gorenstein環の構成。  
などである。

一方研究者相互の切磋琢磨の場として、渡辺、泊が主催する特異点論セミナー、茂手木が主催するトポロジーセミナーがあり、全国から多くの参加者を集め、日本大学文理学部の名を全国に轟かせていると共に、その場での討論によって多くの新しい研究成果が得られている。

以下研究の成果を簡単に述べる。

- 渡辺は与えられた射影多様体 $X$ と整数 $a$ に対して、 $\text{Proj}(R) = X$ かつ $a(R) = a$ となる正規Gorenstein次数付き環が存在するための条件を与え、“varieties with even canonical class”の概念を提唱した。
- また渡辺はKansas大のC.Huneke, 九州大の高木俊輔と正標数の手法を用いて定義される不変量F-threshold  $c^J(a)$ の研究を行った。F-thresholdとイデアルの重複度に関する研究において次の不等式が懸案になっている。

$$e(a) \geq \left( \frac{d}{c^{J(a)}} \right)^d e(J)$$

(ここで $(R, m)$ は $d$ 次元ネーター局所環、 $J$ はパラメーターイデアル、 $a$ は $m$ 準素イデアル、 $e(a)$ は $a$ の重複度を表すとする。)本年度は次数付き環の次数付きイデアルに対し、この不等式が等号になるとき、 $J$ と $a$ は「比例する」という結論を得た。

●茂手木の研究成果はDehn手術とSeifert fiber空間に関してである。結び目のDehn手術でSeifert多様体が生じる典型的な例はトラス結び目のDehn手術で、その仕組みはトラス結び目の補空間のSeifertファイブレーションの拡張という観点から理解することができる。本研究では、双曲結び目のSeifert手術がどのように生じるのだろうか?という根源的な問題をネットワークという全く新しい視点から明らかにすることを目標に研究を進めた。

ネットワークというアイデアを導入することにより、双曲結び目のSeifert手術をトーラス結び目のSeifert手術と関連づける手段が得られ、その起源を記述することが可能となったことは本研究の大きな成果であった。

●泊は本年度は、2次元正規特異点の特異点解消におけるArtinの基本サイクルと極大イデアル因子の同一視に関して、1997年に泊が得た結果を精密化する事ができた。「2次元特異点の一般的超平面切断として現れる1次元特異点の重複度分の既約成分を持つ(\*)」と仮定すると、任意の特異点解消上で上記の同一視問題が肯定的に成立する。この(\*)はnormalized blowing-upについての接錐が被約であることと同値である。2重点についてのJ.Dixonの結果の拡張となる。また、隣接する問題として、星型特異点が次数付き特異点と同等特異性を持つ場合の重複度の同一性に関する一つの十分条件の考察に進展があった。Filtered blowing-up後の極大イデアルの逆像にreflexivityが成り立つかという良い条件の成立・不成立について2重点の場合に具体的ないくつかの例での検証ができた。

#### [主たる研究発表]

K. Watanabe, PASI 2009, Commutative Algebra and its connections to Geometry, Olinda, Brazil, “The a invariants of normal graded Gorenstein rings and varieties with even canonical class”, 2009. 8.14

K. Motegi, AMS Sectional Meeting, 2009 Fall Western Section Meeting (November 7-8, 2009), Special Session on Knotting Around Dimension Three: A Special Session in Memory of Xiao-Song Lin, “Networking Seifert surgeries on knots”, 2009.11.7, University of California, Riverside

泊 昌孝, 特異点山形セミナー2010, 「2次元正規特異点の maximal ideal cycle と fundamental cycle について」, 2010.3.3, 山形大学

#### [研究成果物]

K. Kurano, E. Sato and A. Singh and K. Watanabe, Multigraded rings, diagonal subalgebras, and rational singularities, J. of Algebra, vol 322 (2009), 3248-3267

S. Ohnishi and K. Watanabe, Coefficient ideal of ideals generated by monomials, To appear in Communications in Algebra

A. Deruelle, K. Miyazaki and K. Motegi, Networking Seifert surgeries on knots II: Berge’s lens surgeries, Topology Appl. 156 (2009) 1083-1113, ELSEVIER

K. Ichihara and K. Motegi, Hyperbolic sections in Seifert fibered surface bundles, Quart.

J. Math. 60 (2009) 475-486, Oxford University Press Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana (出版受理)

K. Miyazaki and K. Motegi, Networking Seifert surgeries on knots II: Berge’s lens surgeries (with Arnaud Deruelle and Topology Appl. 156 (2009) 1083-1113, ELSEVIER

#### 【特異点論セミナー・トポロジーセミナー】

本研究の大きな目的として、渡辺、泊；茂手木がそれぞれ主催する「特異点論セミナー」「トポロジーセミナー」において、学外の研究者たちと交流をはかることがあった。以下に特異点論セミナー、トポロジーセミナーの各回の講演者を紹介する。これによって本研究が大変大きな意義をもっていることがわかり頂けると思う。

##### ・特異点論セミナー

2009年4月13日(月) 深澤 知(早大), 渋田敬史(立教大), 石井志保子(東工大・理), 木村俊一(広島大)

2009年5月11日(月) 渡辺敬一(日大・文理), 春井 岳(阪大・理), 蔵野和彦(明大・理工), 佐野太郎(東大・

数理)

2009年6月15日(月)古川勝久(早大・理工),高木俊輔(九大・数理),野間 淳(横浜国大),宮崎 誓(佐賀大)

2009年7月27日(月)渡辺敬一(日大・文理),廣門正行(広島市立大・情報科学),石井志保子(東工大),高山幸秀(立命館大),渡辺 究(早大・理工),

2009年9月8日(火)渡辺敬一(日大・文理),大川新之介(東大・数理),蔵野和彦(明大・理工),石井志保子(東工大・理)

2009年10月19日(月)三内顕義(東大・数理),加藤裕基(東北大・理),川北真之(京大・数理研),権業善範(東大・数理),木村俊一(広島大・理)

2009年11月16日(月)蔵野和彦(明大・理工),澤田宰一(東北大・理),石井志保子(東工大・理),野間 淳(横浜国大),徳永浩雄(首都大)

2009年12月21日(月)渡辺敬一(日大・文理),安武和範(九大・数理),権業善範(東大・数理),石井志保子(東工大・理),渋谷敬史(立教大)

2010年1月25日(月)Jean-Paul Brasselet (Institut de Mathématiques de Luminy, France),真瀬真樹子(首都大),黒田 茂(首都大),藤澤太郎(東京電機大),石井志保子(東工大・理),木村俊一(広島大),渡辺究(早大),渡辺敬一(日大・文理)

・トポロジーセミナー

2010年2月18日(木) 15:00・17:15 Benjamin Burton (The University of Queensland), Ryan Budney (University of Victoria)

2009年11月27日(金) 14:00・16:00 Vincent Blanloeil (Universite de Strasbourg), 石川昌治(東北大学)

2009年8月28日(金) 10:30・12:00, 13:30-15:00 門上晃久(大連理工大学)

2009年7月22日(水) 10:30-17:00, 古宇田悠哉(東京工業大学大学院理工学研究科),石原 海(埼玉大学大学院理工学研究科)(joint work with 下川航也), Yo'av Rieck (University of Arkansas)(joint work with Yasushi Yamashita)