2-2 解析的および整数論的手法による特異集合の解析

●代表者　山浦義彦（数学，教授）
●分担者　森　　真（数学　教授）
　　　　　田村純一（非常勤講師）

【研究の目的および概要】

解析学の研究に於いて，図形（集合）の性質を調べることはしばしば本質的な結果を生みます。たとえば，あるエネルギー汎関数の最小化関数の不連続性集合やフラクタル図形です。本研究の目的は，これらの図形（集合）についての解析的性質を追及することです。不連続性集合とフラクタル図形はその Hausdorff 次元が1であるか，1より真に小さいか，によって本質的に分類され，目指す目標も大きく異なってきます。簡単にそれらの目標を述べると次のようになります。

[1] 不連続性集合の解析

変分問題に於いて現れる不連続性集合にはさまざまなタイプがありますが，本研究で特に目的とするのは関数の不連続性集合と，一階導関数の不連続性集合です。前者はイタリア学派によって構築された特殊有界変動関数からなる SBV 関数空間上で定義されるエネルギー汎関数の値を最小化する関数に対する不連続性集合です。後者は，一階導関数の不連続性集合は関数値が正である領域の境界として捉えることができるため自由境界と呼ばれています。 今年度新たに，体積保存条件を付した自由境界問題を目的の一つとして加えました。体積保存条件下での問題は，水滴の定常状態での形状や水滴がガラス面上を移動する際の時間経過に伴う形状の変化を調べる問題に相当します。保存条件は許容関数空間としての多様体を考えることによって定式化され，その第1変分は古典的 Lagrange multiplier 理論に基づいて定式化されます。

[2] フラクタル図形の解析

力学系のエルゴード性を特徴づけるのにPerron-Frobenius作用素のspectraを調べることが有効なことはよく知られています。最大固有値はエルゴード性やその不変測度を与えます。それに対して2番目に大きな固有値は混合生やその収束の速さを与えることが知られています。

このことに基づいて，1次元の力学系から作られる乱数列について，そのdiscrepancyを与える研究を行いました。高次元の乱数を力学系から構成し，そのdiscrepancyを与えること，および最善の乱数列を力学系から構成することが目標です。

[3] 代数的手法による高次元連分数の研究

代数的手法による高次元連分数の研究を行ってきました。

今年度はおもに以下の2つの方向での研究を目指す。

(a) 高次元連分数の新しいアルゴリズムと数論（不定方程式，代数体の単数，ディオファンタス近似等）への応用

(b) 進化した3次元ビリヤード列の複雑度

【研究の結果】

[1]　主に，体積保存問題に着手しました。この問題は，体積が定められた水滴の動きをとらえるという物理的な実験に対応する問題の数学的定式化です。実際の扱いでは，変分的手法に於ける許容関数空間として，体積保存条件（具体的には積分値が一定値であるという条件）を満たすソボレフ関数を考えます。一般に，変分エネルギー

汎関数のエネルギー最小化関数は，Euler-Lagrange 方程式を満たしますが，体積保存条件がつく場合単純に Euler-Lagrange 方程式（第1変分）を定式化することができません。そこで，古典的 Lagrange 法を適用することでこれを回避します。言い換えれば，許容関数空間に条件として存在する体積保存式を，第1変分の中に組み込んでしまおうという考え方です。この目的のためには積分を用いて記述される体積保存条件の被積分関数に滑らか化を行う必要があります。その結果，今回（1）特性関数の滑らか化，（2）体積保存条件の滑らか化 に加え（3）時間変数の差分化 という3つの要素に対する近似を併用する手法になります。そしてキーポイントはこれらの近似にともなう「近似指数」をどのように設定して計算を進めるかが，鍵を握ることになります。

今回の研究ではこの定式化の下で時間発展問題に取り組みました。その手法は，エネルギー汎関数のレベルでの時間変数の差分化法です。この手法はイタリア学派 E.DeGiorgi によって考案され，それと同時に日本でも研究が行われたものです。この手法の特徴は時間差分化の各ステップをエネルギー汎関数の最小化関数によって決定する点です。このたび，この時間差分近似解についての空間変数に関するリプシッツ連続性を証明することができました。特に，非体積保存問題に比べ特性関数の滑らか化に細心の注意が必要になります。

[2]　2次元の特別な力学系から作られる乱数列が最善であることを見つけました。この構成には代数的な手法を用いました。この方法はさらに高次元へと拡張可能であると思われます。この方法を発展させれば，essential spectrumが最小値になるような力学系の特徴付けも可能であると考えております。

[3]

(a) 任意の各 S（1以上）に対し，S 次元の連分数のアルゴリズムの中で自然なクラスを定めるものをまったく新しい方法でいくつか与えました。

(b) 進化しないビリヤード列の場合，2次元のときはSturm 列になることはMorse-Hedlund の古典的結果としてよく知られています。3次元のときは Rauzy の予想，4次元のときは筆者の予想 があり，Baryshnikov によって一般の次元で肯定的に解決されています。一方で，退化したビリヤード列の複雑度は方向に依存するという困難があり，研究対象として困難であるが，されていないあるクラスの進化したビリヤード列の複雑度に関する部分的な結果を得ました。

【研究の考察・反省】

[1]　体積保存問題は，その物理的背景から考えて許容関数空間の定義域は「有界」であることが自然であると考えられます。一方で，その時間発展問題に於ける空間変数の正則性を証明する解析では，Caffarelli-Vazquez らによってとられた方法である Bernstein method の適用が知られています。今回の研究の strategy は，これを体積保存問題に適用するというものでした。ところが，有界領域の場合この方法がうまくききません。その理由は，1階導関数の最大値を与える点 max point についての議論に於いてそれが内部の点であることを本質的に使います。実際，最大値が内部点であればそこに於ける1階微分は 0 になり，2階微分は負になる，ことが単純な微分積分学のレベルの議論から導くことができます。これらの微分量に関する情報を基として，空間変数の正則性を導く方法が Bernsteim method です。有界領域の場合，max point の存在及びそれが内部点であることを証明することが一般に困難でした。

そこで，領域を全空間（空間全体）に変更してこの困難を乗り切ることに成功しました。これは，空間全体で Sobolev 関数であることを要求することは，大まかに述べれば無限遠方では1階微分まで込めて 0 になることを課すことに他ならず，事実上コンパクト集合上の連続関数の最大値問題に帰着される，というのがその論法の根底にあります。全空間に変更することで，実は解のサポートはコンパクトである，という事実が成り立つことが予想さ

れますが，これについてはまだ着手できていない状況です。さて，一方でこのような定義域の変更が変分問題のエネルギー最小化関数の存在を不確実なものにしてしまうことが分かりました。変分問題の最小化関数の存在は，いわゆる Direct method に頼って証明されます。その際，エネルギー最小化関数列から収束部分列を選出する，いわゆるコンパクト性の議論が必要になりますが，前空間型体積保存問題の場合，エネルギー最小化関数列の極限移行によって，体積量が保存されることを証明することが困難になります。このことは，物理現象で言えば，水滴の水が極めて薄く全空間に広がってしまう可能性を示唆しています。これを回避するためには，何らかの制限条件を付す必要があると現在試行錯誤を繰り返しております。また，最小化関数の存在はひとまず認めて，今回の研究では手が回らなかった，時間変数についてのヘルダー連続性証明にも，研究を進めていきたいと考えております。

[2]　残念ながら，3次元の構成もやっと方向性が見えたにとどまり，一般の次元への構成はまだ目処がたっていません。その上，一般の力学系の第２固有値を与える方法については形式的な定理にとどまり，実用的なものを開発できていません。これらが今後の課題となります。

[3]　素因子に関する付値の列は Toeplitz 列である，という予想をたてることができました。s次元の連分数のクラスC（S）の特別の元として，3次（4次）の代数体に有効なアルゴリズムを含んでいるかどうか，今のところ謎であり，　今回，得た新たなアルゴリズムは有効であると思われますが，実際に検証するにはさらに数ヶ月，数年の計算実験を要すると思われます。

　また，退化した高次元のビリヤード列については，部分的な結果にとどまったので，これのさらなる一般化を目指したいと考えております。

【研究発表および成果】

［論文］

J.Tamura: A new multidimensional continued fraction algorithm, Math. Comp. 78（2009），2209-2222 with S.Yasutomi

M.Mori: On random numbers generated by Dynamical systems, Actes des rencontres du CIRM，vol.1 -1, 49-53, 2009

［発表］

J.Tamura: Rational points on an elliptic curve, and sequences of low complexity, Workshop「数論とエルゴード理論」，金沢大学，2010年3月7日

M.Mori: 1. A strategy of construction d-dimensiona low discrepancy sequences, Measurabel Topological Dynamical Systems in Asia, Suwon, Korea，2009/06/19

2. 力学系と疑似乱数，計算による数理科学の展開，神戸大学，2010/01/08

3. Random numbers generated by Dynamical system, Colloquim in Rouen，Rouen, France, 2010/01/28